Формулировка задачи теории упругости. Уравнения теории упругости в перемещениях и напряжениях. Плоская задача теории упругости. Алгоритм решения плоских задач теории упругости на ЭВМ Принцип Сен-Венана. Распространение упругих волн. Объемные волны. Поверхностные волны Релея. Волны Лява. Распространение волн в стержнях. Скорости распространения продольных и поперечных волн. Прохождение волн через границу сред.

1. Группа статических уравнений (уравнения равновесия)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0,\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где X, Y и Z проекции на координатные оси объемных сил, отнесенные к единице объема тела;

и условия на поверхности

$$\begin{aligned}
&X_\nu=\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n,\\
&Y_\nu=\tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n,\\
&Z_\nu=\tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n
\end{aligned} \tag{2}$$

2. Группа геометрических уравнений.

В эту группу входят формулы Коши

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{dx},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},\\
&\varepsilon_{yy}=\frac{\partial \upsilon}{dy},\ \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\\
&\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{dz},\ \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3}$$

и 6 уравнений сплошности Сен-Венана

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}.\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}.\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}.\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}.\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial z\partial x}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Первые три уравнения Сен-Венана отражают непрерывность кривизн деформированных волокон тела, а **вторые три** – непрерывность относительных углов закручивания.

3. Группа физических соотношений (отражающих математическую модель материала). В эту группу входят формулы закона Гука либо в прямой форме, когда мы находим компоненты полных **деформаций**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right], \ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{zz})\right], \ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad (6)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right], \ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

где E – модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, G – упругий модуль сдвига, либо в обратной форме, когда мы находим компоненты полных **напряжений**

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz}, \ \tau_{xy} = G\gamma_{xy},$$
$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz}, \ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \qquad (7)$$
$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{zz}, \ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

Модули упругости (модуль Юнга и модуль сдвига) определяются из опытов на стандартных образцах, характеризуют меру жесткости материала и имеют размерность напряжения.

Существует еще целый ряд записей закона Гука. В данном случае эти прямая и обратная записи для изотропных материалов, упругие свойства которых могут быть полностью определены только двумя независимыми характеристиками,
где λ и $G = \mu$ это коэффициенты Ламэ.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \ \ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G.$$

Эти три типа уравнений позволяют решать задачи теории упругости в напряжениях и деформациях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних сил. Приведенные основные уравнения содержат 15 неизвестных функций:

Это - шесть компонент тензора напряжений

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$,

шесть компонент тензора деформаций

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$

и три компоненты перемещений

$u(x,y,z), \upsilon(x,y,z), w(x,y,z)$.

Для отыскания этих неизвестных мы располагаем 15 –ю уравнениями. Это 3 уравнения равновесия, 6 соотношений Коши и 6 уравнений, отражающих закон Гука. С математической точки зрения задача сводится к интегрированию 15 уравнений при удовлетворении условий на граничной поверхности.

Решение этих уравнений можно получать различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные.

1 вариант. Находим решение в перемещениях, это значит, что нам в результате решения необходимо определить перемещения во всех точках или (еще говорят) определить поле перемещений $u(x,y,z), \upsilon(x,y,z), w(x,y,z)$.

2 вариант. Находим решение в напряжениях, это означает, что основными неизвестными у нас являются напряжения и нам необходимо определить в итоге

поле напряжений во всех точках $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$.

3 вариант. Решение в смешанной форме, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений.

Плоская задача теории упругости.

В теории упругости имеется большой класс задач, важных в смысле практических приложений и при этом допускающих значительные упрощения математической стороны решения. Например: в этих задачах одну из координатных осей тела можно исключить из рассмотрения и все явления рассматривать в рамках одной координатной плоскости 0XY. В этом случае напряжения, деформации и перемещения будут являться функциями только этих двух координат x и y. Такие задачи носят название **плоской задачи теории упругости**. Под термином "плоской задачи теории упругости" объединяют две физически разные задачи, приводящие к весьма сходным физическим зависимостям

1. Задача о плоском деформированном состоянии (случай плоской деформации);
2. Задача о плоском напряженном состоянии (случай плоского напряженного состояния).

   Для этих задач чаще всего характерно значительное отличие одного геометрического размера от двух других размеров рассматриваемых тел: **большая длина** в первом случае, либо **малая толщина** во втором случае.

Плоская деформация.

Деформация называется плоской, если перемещения всех точек тела могут происходить только в двух направлениях одной плоскости и не зависят от координаты, перпендикулярной этой плоскости, т.е.

$$u(x,y), \upsilon(x,y), \text{ а } w=0.$$

Плоская деформация возникает в длинных призматических или цилиндрических телах с осью, параллельной оси z, вдоль которой по боковой поверхности действует нагрузка, перпендикулярная этой оси и не меняющаяся по величине вдоль нее. Примером плоской деформации может служить напряженно-деформированное состояние, возникающее в длинной прямой плотине и длинном своде подземного тоннеля, длинной рельсы. Компоненты тензора деформаций зависят от x и y:

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x,y)$, $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x,y)$,

$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(x,y)$, $\gamma_{yz} = 0$,

$\varepsilon_{zz} = 0$, $\gamma_{zx} = 0.$

Отсутствие линейных деформаций в направлении z приведет к появлению напряжений вдоль оси z. Это следует из закона Гука (6):

$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]$, откуда следует, что при $\varepsilon_{zz}=0$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}).$$

Подставляя это соотношение в две первые формулы закона Гука, находим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{yy}\right) \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{xx}\right)$$

Также находим для напряжений:

$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,y)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y)$,

$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x,y)$, $\tau_{yz} = 0$,

$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x,y)$, $\tau_{zx} = 0.$

Из трех дифференциальных уравнений равновесия Навье остаются только два уравнения, т.к. исчезают члены, зависящие от z:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+X=0, \text{ и}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+Y=0,$$

Из трех условий на боковой поверхности остаются два уравнения, т.к. $n=\cos(\nu, z)=\cos 90^0=0$, а $Z_\nu=0.$ В этих уравнениях нет членов, зависящих от z:

$$X_\nu=\sigma_x l+\tau_{xy} m,$$

$$Y_\nu=\tau_{yx} l+\sigma_y m,$$

Из шести уравнений Коши остаются три:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{dx}, \ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}, \ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial \upsilon}{dy},$$

Из шести уравнений Сен-Венана остается одно уравнение, которое не содержит членов, зависящих от z:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Из шести формул закона Гука остаются три формулы, которые можно записать так:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E_1}\left(\sigma_{xx}-\nu_1 \sigma_{yy}\right) \ \varepsilon_{yy}=\frac{1}{E_1}\left(\sigma_{yy}-\nu_1 \sigma_{xx}\right), \ \gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xy}$$

В этих соотношениях **для сохранения традиционного** в теории упругости **вида** записи введены **новые упругие постоянные**:

$$E_1=\frac{E}{1-\nu^2}, \ \nu_1=\frac{\nu}{1-\nu^2}.$$

Плоское напряженное состояние.

Плоское напряженное состояние возникает в том случае, когда длина того же призматического тела мала по сравнению с двумя другими размерами. В этом случае ее называют **толщиной**. Напряжения в теле действуют только в двух направлениях в координатной плоскости 0XY и не зависят от координаты z. Примером такого тела может служить тонкая пластина толщиной h, **нагруженная по боковой поверхности (ребру)** силами, параллельными плоскости пластины и равномерно распределенными по ее толщине. При решении такой задачи также возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации. Компоненты тензора напряжений $\sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ на обеих плоскостях пластины равны нулю. Так как пластина тонкая, то можно считать, что они равны нулю и внутри пластины. Тогда напряженное состояние будет определяться только компонентами $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$, которые не зависят от координаты z, т.е. не меняются по толщине пластины, а являются функциями только от x и y. В тонкой пластине имеем следующее напряженное состояние

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}(x,y), \ \tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y),$$

$$\sigma_{yy}=\sigma_{yy}(x,y), \ \tau_{yz}=0,$$

$$\sigma_{zz}=0, \ \tau_{zx}=0.$$

По части напряжений плоское напряженное состояние отличается от плоской деформации условием $\sigma_{zz}=0$.

Из закона Гука (6) $\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]$ с учетом, что $\sigma_{zz}=0$ для линейной деформации ε_{zz} получаем:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0 .$$

Поэтому основания пластины будут искривляться, т.к. появятся перемещения

$w = \varepsilon_{zz} z = -\dfrac{\nu z}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ по оси z .

При этих предположениях получаем уравнения плоского напряженного состояния: формулы закона Гука

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right), \; \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

Эти формулы **отличаются** от формул закона Гука для плоской деформации только **значениями** упругих постоянных E и E_1, ν и ν_1**.**

При решении этих двух задач (**плоская деформация и плоское напряженное состояние**) можно пользоваться одними и теми же уравнениями и объединять задачи в одну плоскую задачу теории упругости.

В плоской задаче теории упругости восемь неизвестных:
две компоненты вектора перемещений,
три компоненты тензора напряжений,
три компоненты тензора деформаций.

Для решения плоской задачи теории упругости используют 8 уравнений:
два дифференциальных уравнения равновесия Навье,
три уравнения Коши,
три формулы закона Гука.

Полученные деформации должны подчиняться одному уравнению неразрывности деформаций, а на поверхности тела должны выполняться условия равновесия между внутренними напряжениями и напряжениями от внешней поверхностной нагрузки.

Технические коэффициенты и методы измерения.

В изотропных материалах знание только двух независимых упругих характеристик позволяет определить упругие деформации и напряжения в рамках закона Гука. Удобно использовать технические характеристики, которые имеют **ясный физический смысл**. Модуль Юнга определяет изменение длины на единицу длины при растягивающем напряжении. Коэффициент Пуассона также измеряют в условиях растяжения образца. Этот коэффициент определяет отношение поперечного сжатия к продольному удлинению. Модуль сдвига G - мера деформации сдвига под действием сдвигающего напряжения. Т.к. в изотропных телах есть только два независимых коэффициента, любой из этих трех коэффициентов определяется через два известных.

Принцип Сен-Венана.

Принцип Сен-Венана позволяет заменить одни граничные условия (действующие силы) другими (удобными для статичного расчета) при условии, что равнодействующая и главный момент действующей системы сил не изменяется. Согласно принципу Сен-Венана на расстояниях, в 4 раза больших максимального линейного размера зоны приложения нагрузок, распределение напряжения не зависит от формы нагружения. Цифра 4 возникла в последние годы, на основе опыта решения задач с использованием вычислительных машин, а не при Сен-Венане.

Распространение упругих волн. Объемные волны. Поверхностные волны Релея. Волны Лява. Распространение волн в стержнях. Скорости распространения продольных и поперечных волн. Прохождение волн через границу сред.

Упругими волнами называются механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругих средах.

Звуковые или *акустические волны* — это волны, которые распространяются в упругой среде, характеризующиеся слабыми возмущениями. Т.е. это механические колебания с малыми амплитудами.

В **неограниченной** изотропной среде могут распространяться только **объемные** продольные и поперечные волны – это два типа упругих волн. Однако, когда имеется граничная поверхность, могут возникать также поверхностные упругие волны. После прохождения упругих волн каждая частичка материала возвращается в свое исходное состояние, но благодаря этой передаче энергии можно решить огромное количество практических задач, зная законы распространения упругой энергии.

Волны, подобные гравитационным волнам в жидкостях, были впервые исследованы в 1887 г. Релеем, который показал, что их действие быстро затухает с глубиной и что скорость их распространения меньше скорости волн внутри тела. Скорость распространения поверхностных волн не зависит от частоты и зависит только от упругих постоянных материала.

Наиболее распространёнными типами упругих волн в твёрдых телах являются:

- **продольные** волны — волны с колебанием частиц вдоль направления распространения волны;
- **поперечные** волны — волны с колебанием частиц перпендикулярно направлению распространения волны;
- **поверхностные** волны (например, волны Рэлея) — волны с колебанием частиц по эллипсам вдоль поверхности тела (комбинация продольных и поперечных волн, распространяющихся по поверхности с одинаковой скоростью и быстро затухающие с глубиной);
- волны Лэмба — волны в тонких пластинах;
- **изгибные** волны — распространение колебаний деформации изгиба в стержнях или пластинах, длина волны которых много больше толщины стержня или пластины.

При распространении упругой волны можно наблюдать следующие явления:

Дисперсия – зависимость скорости распространения волны от ее частоты колебаний

Резонанс – резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты изменения внешней силы, действующей на систему, с частотой свободных колебаний.

Интерференция – сложение в пространстве двух (или нескольких) волн, при котором образуется постоянное во времени распределение амплитуды результирующих колебаний в различных точках пространства.

Дифракция – отклонение от прямолинейного распространения волн, огибание волнами препятствий.

Выполнение принципа Гюйгенса - угол отражения волны от поверхности равен **углу падения**.

Поверхностные акустические волны (ПАВ) — упругие волны, распространяющиеся вдоль поверхности твёрдого тела или вдоль границы с другими средами. **Поверхностные акустические волны** подразделяются на два типа: с вертикальной поляризацией и с горизонтальной поляризацией (волны **Лява**).

В случае твердых тел существует два предельных случая: деформации упругие и деформации пластические. Пределом упругости называют силу, до которой деформация будет упругой. Для идеально упругих тел между действующими силами и деформациями существует однозначная связь, описываемая законом Гука: F=kΔx, где F – действующая сила, k – коэффициент пропорциональности.

Частные случаи поверхностных акустических волн.

К наиболее часто встречающимся частным случаям поверхностных волн можно отнести следующие:

1. Волны **Рэлея**, распространяющиеся вдоль границы упругого полупространства с вакуумом или с достаточно разреженной газовой средой. Энергия этих волн локализована в поверхностном слое толщиной порядка длины волны. На глубине порядка длины волны интенсивность составляет 5% от интенсивности на поверхности. Частицы среды в волне Рэлея движутся по эллипсам, большая полуось которых перпендикулярна границе, а малая - параллельна направлению распространения волны (рис. 1). Рэлеевская волна в изотропном твердом полупространстве, состоит из двух плоских неоднородных волн — продольной и поперечной с векторами смещения, лежащими в плоскости, перпендикулярной границе и параллельной направлению распространения волны. Эти волны и составленная из них рэлеевская волна — волны с вертикальной поляризацией. Релеевские волны плохо распространяются по шероховатым поверхностям из-за рассеяния. Но при хорошей обработке поверхности могут применяться для выявления поверхностных трещин. Скорость распространения волны Релея составляет примерно 93% от скорости продольных волн в материале. Например, в металлах это порядка 5 км/сек.

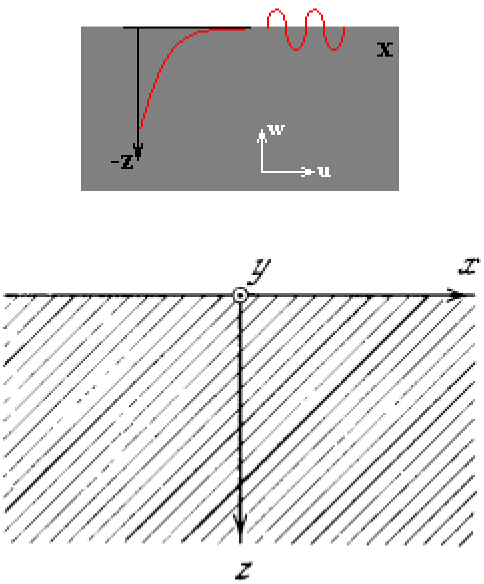


Рис. 1 Поверхностная упругая волна Рэлея на свободной границе твердого тела

Обозначения:

x - направление распространения волны;

u,*w* - компоненты смещения частиц;

кривые изображают ход изменения амплитуды смещений при удалении от границы.

2. Затухающие волны **рэлеевского** типа на границе твердого тела с **жидкостью**. Эта волна непрерывно излучает энергию в жидкость, образуя в ней отходящую от границы неоднородную волну (рис. 2).

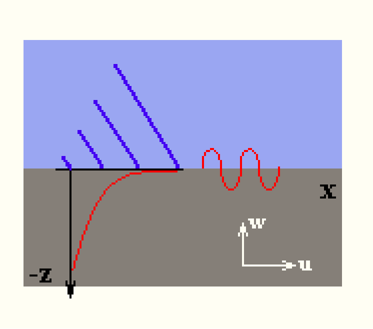


Рис. 2 Поверхностная упругая затухающая волна рэлеевского типа на границе твердого тела и жидкости

Обозначения:
x - направление распространения волны;
u,*w* - компоненты смещения частиц;
кривые изображают ход изменения амплитуды смещений при удалении от границы;
наклонные линии - фронты отходящей волны. Распределение по глубине смещений и напряжений - такое же, как в волне **Рэлея**.

3. Волна **Стоунли**, распространяющаяся **вдоль плоской границы двух твердых сред**, модули упругости и плотности которых не сильно различаются. Волны на границе двух твердых полупространств (жестко склеенных), описаны **Стоунли** в 1924 г. Такая волна состоит (рис. 3) как бы из двух **рэлеевских** волн - по одной в каждой среде.

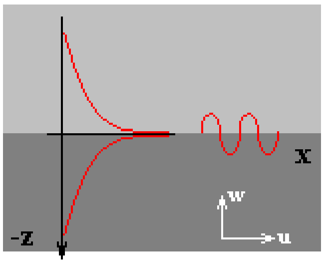
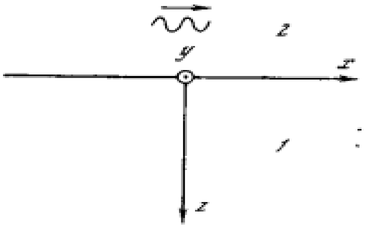


Рис. 3 Поверхностная упругая волна **Стонли** на границе двух твердых сред

Обозначения:
X - направление распространения волны; *u*,*w* - компоненты смещения частиц;
кривые изображают ход изменения амплитуды смещений при удалении от границы. Вертикальные и горизонтальные компоненты смещений в каждой среде убывают при удалении от границы так, что энергия волны оказывается сосредоточенной в двух граничных слоях. Волны **Стоунли** бывают двух поляризаций: вертикальной и горизонтальной. С помощью этих волн проводят диагностику качества склеивания двух твердых тел.



$(U_y \neq 0, U_{x,z} = 0)$. $(U_{x,z} \neq 0, U_y = 0)$

Рис.4. Граница двух твердых полупространств

Рассмотрим случай, когда второе полупространство — **жидкость**.

В этом случае волна **Стоунли** распространяется вдоль границы при любом соотношении модулей упругости и плотностей твердой и жидкой сред. Энергия волны сосредоточена в основном в **жидкости**. Именно эта волна распространяется по дну океана при землетрясениях.

4.Волны **Лява** – поверхностная волна с **горизонтальной** поляризацией, которые могут распространяться на границе твердого полупространства с твердым **слоем** (рис. 5).

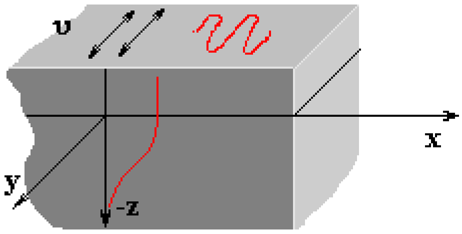


Рис. 5 Поверхностная упругая волна Лява на границе "твердое полупространство - твердый слой"

Обозначения:
x **- направление распространения волны**;
кривые изображают ход изменения амплитуды смещений при удалении от границы.
Эти волны - чисто **поперечные**: в них имеется только одна компонента смещения *v*, а упругая деформация в волне **Лява** представляет собой **чистый сдвиг**.
Смещения в слое распределены по косинусу, а в полупространстве экспоненциально убывают с глубиной. Для волн **Лява** характерна дисперсия скорости.
К поверхностным волнам относят и волны на свободной поверхности **жидкости** или на границе раздела **двух несмешивающихся жидкостей**. Такие поверхностные волны возникают под влиянием внешнего воздействия, например, ветра, выводящего поверхность жидкости из равновесного состояния. В этом случае, однако, упругие волны существовать не могут. В зависимости от природы возвращающих сил различают 3 типа поверхностных волн: **гравитационные**, обусловленные в основном силой тяжести; **капиллярные**, обусловленные в основном силами поверхностного натяжения; **гравитационно-капиллярные**.

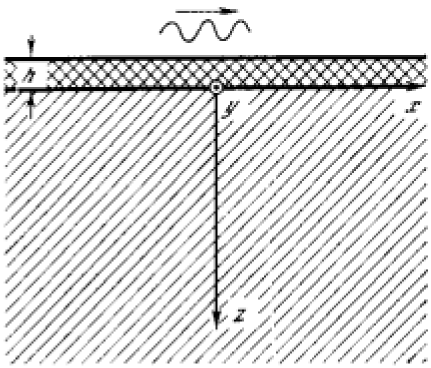


Рис.6. Твёрдое полупространство со слоем

Т.к. поверхностные волны расходятся только в двух измерениях и, следовательно, затухают с расстоянием медленнее объемных упругих волн, то можно ожидать, что они играют важную роль в сейсмических явлениях. Записи обнаруживают **три** отдельные группы волн. **Первыми прибывают волны**, в которых колебания преимущественно **продольные**; это волны расширения, имеющие наибольшую скорость распространения. Позже **приходят волны искажения**, в которых движение главным образом **поперечное**, и, наконец, **поверхностные волны**, амплитуда которых велика по сравнению с амплитудой двух других типов волн. Если эта последняя группа состоит только из волн **Релея**, в ней должны содержаться как вертикальная, так и горизонтальная компоненты с преобладанием первой. Практически найдено, что это не так: вертикальная компонента иногда полностью отсутствует. Для волн **Релея** направление колебаний горизонтальной компоненты должно быть параллельно направлению распространения, тогда как часто обнаруживаются горизонтальные компоненты, параллельные фронту волны. **Ляв** высказал мысль, что эти волны могут быть объяснены, если предположить, что упругость и плотность внешних слоев земли отличаются от их значений внутри. **Ляв** показал, что **поперечные** волны могут распространяться по такому внешнему слою без проникновения в глубину. Волны такого типа стали называться *волнами **Лява.*** **Стоунли** рассмотрел более общую задачу распространения волн на поверхности раздела двух твердых сред. Он показал, что в средах должны распространяться волны, аналогичные волнам **Релея**, причем амплитуды в них должны достигать максимума на поверхности раздела. **Стоунли** исследовал также обобщенный тип волны **Лява**, которая распространяется вдоль внутреннего пласта, ограниченного с обеих сторон толстыми слоями материала, отличающегося по своим упругим свойствам.

5.Головные волны распространяются вблизи поверхности в подповерхностном слое. Скорость головной волны равна скорости продольной волны. **Головные волны:**

Являются суммой поверхностно-продольной и генерирующей ее объемно-продольной волны; нечувствительны к шероховатостям поверхности; имеют наибольшую амплитуду на глубине около 6 мм; не затухают, не отражаются и не рассеиваются на поверхности; имеют наибольшую скорость распространения из всех других типов акустических волн. Головные волны используются для выявления подповерхностных дефектов с глубиной залегания 6-10 мм от поверхности.

6.Волны Лэмба. Нормальная волна Лэмба – комбинация стоячих и бегущих волн. Этот тип волн представляет собой упругие колебания, которые распространяются в волноводах, (например, пластинах или слоях) и имеют фронт, перпендикулярный направлению распространения. Толщина слоя соизмерима с длиной первичной волны. Суть явления этих волн – резонанс объемных волн при наклонном падении.

Волны Лэмба в жидком слое. Данный тип волн чувствителен к неоднородностям волновода, поэтому применяется для диагностики качества труб. Отличительной особенностью Лэмбовских волн является дисперсия скорости.

Волны Лэмба в твердых телах. В случаях распространения в твердых телах волновая картина усложняется из-за наличия поперечных волн. Дисперсия скорости нормальных волн проявляется сильнее, чем в случае распространения в жидкости. Поскольку волны **Лэмба** распространяются в пластине на большие расстояния, их используют для контроля тонких листов, оболочек и труб. Изменение сечения волновода или появление в нем неоднородностей и дефектов будет вызывать отражение нормальных волн **Лэмба**. Нарушение условий распространения волн в волноводе будут вызывать как продольные, так и поперечные дефекты. Наиболее эффективно применение волн Лэмба для контроля пластин толщиной 3-5 мм. При больших толщинах произойдет трансформация нормальных волн **Лэмба** в поверхностные волны **Релея** (например, при контроле изделий с наличием тонких и толстых участков). Для возбуждения волн **Лэмба** необходимо, чтобы волновые фронты падающей и преломленной волн были как можно больше. Сама длительность импульса в импульсном режиме должна превышать время распространения волны в пластине, иначе интерференция волн на поверхности пластины не произойдет, и стоячая волна в поперечном сечении пластины не возникнет.

7.Волны в стержнях Порхгаммера. Это особый вид нормальных (неповерхностных) волн, которые возникают в стержнях, диаметр которых соизмерим с длиной распространяющийся волны. Волны **Порхгаммера** могут быть симметричными, антисимметричными, а также крутильными, аналогов которым нет среди волн в пластинах. Скорость распространения продольных волн **Порхгаммера** меньше скорости распространения продольных волн и зависит только от модуля Юнга и плотности материала. Волны **Порхгаммера** применяют для контроля сплошности тонких прутков и проволоки.

Все эти волны представляют собой результат интерференции объемных волн в ограниченных средах. Наличие границ раздела математически учитывается введением соответствующих граничных условий в волновом уравнении. Ограниченные среды, такие как пластины и стержни представляют собой своеобразные волноводы, в которых интерферирующие волны распространяются без рассеяния.

Применение поверхностных акустических волн получило широкое распространение во многих сферах жизни. Например, в медицине (ультразвуковое исследование), в геологии (сейсморазведка), в технике (ультразвуковая дефектоскопия) и т. д.

Скорости распространения продольных и поперечных волн в объеме.

Движение газов и жидкостей, в том числе колебания описываются давлением, плотностью и скоростью частиц среды. Давление в твердых телах может иметь иную природу, чем в газах и жидкостях, поэтому для описания динамики твердого тела оперируют уже деформациями и напряжениями. У твердых тел выделяют продольные и поперечные колебания. Уравнения малых упругих колебаний в неограниченной изотропной среде для плоской продольной и поперечной волн имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

общей формы записи $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где с – скорость распространения волн, c_l - скорость распространения продольной волны, c_t скорость распространения поперечной волны.

В акустическом приближении скорости продольных и поперечных волн считают константами для каждого материала. Для большинства металлов $c_t \approx 0.55 c_l$, точнее

$c_l = \sqrt{\frac{G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$, и $c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, а для тонких стержней $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ известна только скорость распространения продольных волн (**Порхгаммера**).

Т.к. в жидкостях и газах G стремится к нулю, то и скорость поперечной волны стремится к нулю. Воспринимаемые человеческим ухом звуки имеют частоты от 20 до 20000 Гц и длины упругих волн, распространяющиеся в воздушной среде от 15 метров до 1,5 см.

Прохождение волн через границу сред.

При прохождении волн через границу раздела акустические волны испытывают не только отражение и преломление, но и превращение одного типа волн в другой.

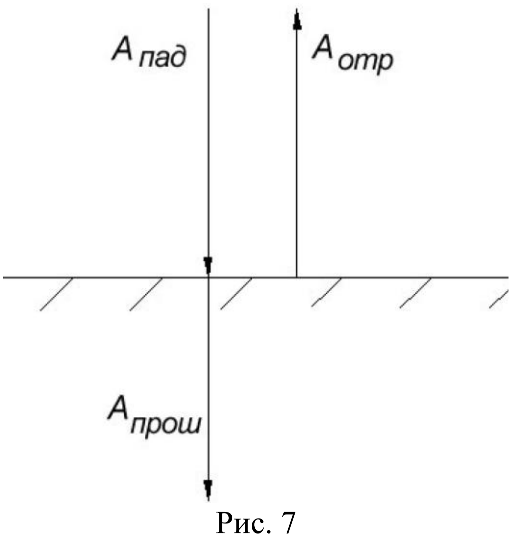


Рис. 7

Прохождение волны через границу раздела двух сред: $A_{пад}$ – амплитуда падающей волны, $A_{прош}$ – прошедшей волны, $A_{отр}$ – отраженной волны

Рассмотрим энергетические соотношения между падающей, отраженной и прошедшей волнами. Они характеризуются коэффициентами отражения и преломления.

Коэффициентом отражения по амплитуде R называется отношение амплитуд отраженной и падающей волн:

$$R = \frac{A_{отр}}{A_{пад}}.$$

Коэффициентом прохождения по амплитуде D называется отношение амплитуд прошедшей и падающей волн:

$$D = \frac{A_{прош}}{A_{пад}}.$$

При падении волны из среды 1 в среду 2 коэффициент отражения R определяется как

$$R = \frac{A_{отр}}{A_{пад}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

где Z_1, Z_2 акустические импедансы сред 1 и 2 соответственно. Акустическим импедансом называют отношение звукового давления к колебательной скорости для любой волны. Для безграничной среды $Z = \rho c$, где ρ - плотность материала, а c - скорость звука.

При падении из среды 1 в среду 2 коэффициент прохождения определяется

$$D = \frac{A_{прош}}{A_{пад}} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}.$$

Из представленных формул видно, что чем больше отличаются акустические импедансы сред, тем большая часть энергии звуковой волны отразится от границы раздела двух сред. Этим определяется как возможность, так и эффективность выявлений нарушений сплошности материала (выявления дефектов с акустическим сопротивлением, отличающимся от сопротивления контролируемого материала). Именно поэтому лучше всего выявляются дефекты с воздушным заполнением. Отражение от дефекта, заполненного газом, приближается к 100%, а для несплошности, заполненной шлаком этот коэффициент значительно ниже. При нормальном падении волны на границу двух протяженных сред соотношение между амплитудами падающей, отраженной и прошедшей волны $A_{пад} \neq A_{отр} + A_{прош}$. Энергия же падающей волны в случае нормального падения на границу двух протяженных сред распределяется между отраженной и прошедшей волной по закону сохранения. Значения импеданса различны для продольной волны и поперечной. Для твердых, жидких и газообразных сред значения характеристических импедансов различаются на несколько порядков: 10^5:10^3:1.