Египет

Самый большой из сохранившихся до наших дней математический папирус — это папирус Райнда, названный по имени владельца, который приобрёл его в 1858 г. Папирус Райнда составлен писцом Ахмесом (1680-1620 до н.э.); он содержит 84 задачи. Другой большой математический папирус — так называемый Московский папирус, хранящийся в Музее изобразительных искусств имени А.С.Пушкина. Он содержит 25 задач. Оба эти математических папируса составлены для учебных целей и переписаны с оригиналов, восходящих примерно к 1900 г. до н.э.

Папирус Райнда начинается обещанием научить «совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию всех тайн…». А в действительности речь идёт только о тайнах счёта и о вычислениях с дробями.

Очень важным свидетельством являются слова Демокрита: «Никто не превзошел меня в складывании линий, сопровождающемся доказательством, — даже так называемые гарпедонапты у египтян.» Это едва ли не единственное прямое указание на то, что в египетской геометрии были доказательства. Косвенным указанием являются, например, слова Прокла о том, что Фалес впервые перенёс геометрию из Египта в Элладу. Для греков геометрия подразумевала доказательства.

владыки обеих стран. Я открываю тебе приказ твоего господина. Ибо смотри, ты — опытный писец, стоящий во главе войска. Необходимо сделать укрепление в 730 локтей длины и 55 локтей ширины, состоящее из 120 ящиков, наполненных балками и камышом; в верхней части его высота 60 локтей, в середине 30 локтей с…15 локтей, и его…имеет 5 локтей. Спрашивают у генералов, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собрались все писцы, и ни один из них ничего не знает, они все полагаются на тебя и говорят: «Мой друг, ты — опытный писец, так реши же это быстро для нас». Вот ты имеешь знаменитое имя; пусть же в этом месте найдётся хоть один, который возвеличит всех тридцать. Не допусти, чтобы о тебе сказали: «Есть также и такие вещи, которых и ты не знаешь».

Для развлечения изучающих математику приводились и задачи, явно возникшие не из практики. Вот одна из наиболее известных таких задач: «Есть 7 домов, и в каждом живёт по 7 кошек. Каждая кошка съела 7 мышей, каждая мышь съела 7 колосьев ячменя. Каждый колос мог дать 7 мер хлеба. Найти сумму домов, кошек, мышей, колосьев и мер.» В ответе получается 19607.

1.1.3. Египетские дроби

Деление $m : n$ египтяне иногда представляли как умножение m на аликвотную дробь $1/n$. Других дробей египтяне не рассматривали, за исключением дробей 2/3 и 3/4 (и иногда дробей $2/n$). Эти дроби, как и дроби 1/2, 1/3, 1/4, 1/6 и 1/8 часто встречались на практике, а потому имели специальные названия.

Папирус Райнда начинается с таблицы представления дробей $2/n$ для n от 3 до 101 в виде сумм аликвотных дробей. Например, $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$.

Использование только аликвотных дробей — характерная особенность египетской математики. Обычно достаточно скоро возникали дроби общего вида и развитие математики не останавливалось на аликвотных дробях.

1.1.4. Вычисления «аха»

Египетское слово «аха» означает «куча», «груда», «количество». Количество здесь — неизвестная величина, которую нужно найти. Вычисление «аха» приблизительно соответствует нашим уравнениям первой степени с одним неизвестным. Пример таких вычислений даёт задача 26 из папируса Райнда. «Количество и его четвертая часть дают вместе 15». Таким образом, речь идёт о решении уравнения $x + \frac{1}{4}x = 15$. Египетское решение начинается так: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1; вместе 5». Затем производится деление $15 : 5 = 3$, а в конце умножение $4 \cdot 3 = 12$. Требуемое количество равно 12.

Здесь используется приём, который в средневековой Европе получил название «метод ложного положения». Начинаем с того, что в качестве искомого количества берём произвольное число (в рассматриваемом случае это 4, для которого легко вычислить четвёртую часть). Четыре и его четвёртая часть вместе дают 5. Но результат должен быть равен 15, поэтому выбранное количество нужно ещё умножить на $15 : 5 = 3$.

Вычисления «аха» использовались и для решения двучленных квадратных уравнений вида $ax^2 = b$. Например, решается такая задача. «Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть $\frac{3}{4}$ стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это.» В решении берётся квадрат со стороной 1, тогда сторона другого квадрата равна $\frac{3}{4}$. Сумма площадей этих квадратов равна $1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$. Квадратный корень из этой площади равен $\frac{5}{4}$. Квадратный корень из 100 равен 10. А сколько раз $\frac{5}{4}$ входит в 10? Ясно, что 8 раз. Поэтому стороны искомых квадратов равны 8 и $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

а. ИСЧИСЛЕНИЕ «АХА»

ИЗ БЕРЛИНСКОГО ПАПИРУСА ЭПОХИ СРЕДНЕГО ЦАРСТВА

(2000—1800 г. до н. э.)

[№ 14, с. 38—39.]

Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ (1) стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это (2).

Возьми квадрат со стороной 1, и возьми $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ от 1, то есть $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ в качестве стороны второй площади. Помножь $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ на самого себя; это дает $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. Поскольку сторона первой площади взята за 1, а второй за $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, то сложи обе площади вместе; это даст $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. Возьми корень отсюда: это будет $1+\frac{1}{4}$. Возьми корень из данных 100: это будет 10. Сколько раз входит $1+\frac{1}{4}$ в 10? Это входит 8 раз (3). [Далее текст прочесть нельзя (4).]

Современный комментарий

Дальше задач, сводящихся к уравнениям указанных двух видов, египтяне, насколько известно, не пошли — слишком сложна для этого оказалась их техника счета.

1. Древнеегипетские вычислители не применяли дробей с произвольными числителями. Они использовали лишь дроби вида $\frac{1}{k}$, где k — целое положительное число, а также дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, для которых имелись специальные обозначения $\left(\text{впрочем, } \frac{3}{4}\right.$ впоследствии, что нашло отражение и в приведенном отрывке, стали записывать как сумму $\left.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$. Счет с этими дробями предполагает особую технику, в основе которой лежит представление дробей вида $\frac{m}{n}$ в виде суммы долей единицы $\left(\text{и } \frac{2}{3}\right)$.

2. Условие задачи можно записать в виде уравнения

$$x^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 x^2=100.$$

3. Итак, если принять сторону первого квадрата равной 1 («ложное положение»), то сторона второго будет $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, а сумма их площадей $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ $\left(\text{т. е. } \frac{25}{16}\right)$. Корень квадратный из этого числа $1+\frac{1}{4}$ $\left(\text{т. е. } \frac{5}{4}\right)$ восемь раз содержится в 10, квадратном корне из 100. Само деление $10:\left(1+\frac{1}{4}\right)$ производится как действие, обратное умножению, а последнее сводится к последовательным удвоениям (и, если требуется, раздвоениям). В данном случае троекратное удвоение $1+\frac{1}{4}$ дает $2+\frac{1}{2}$, 5 и 10.

4. Так как квадратный корень из числа $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ в 8 раз меньше квадратного корня из 100, то принятое за длину стороны квадрата число, т. е. единицу, следует умножить на 8. Таким образом, легко восстанавливается содержание недостающей части текста: стороны искомых квадратов будут $8\cdot 1=8$ и $8\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=6$.

$$n=\varepsilon_0 2^0+\varepsilon_1 2^1+\ldots+\varepsilon_k 2^k \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(*)$$
$$\varepsilon_k \in \{0,1\}$$

Это – задача 2.

Египетский треугольник

$$(x,y,z). \quad x^2+y^2=z^2$$

$$k\left(a^2-b^2,2ab,a^2+b^2\right)$$

$$\left(a^2-b^2,2ab,a^2+b^2\right)$$

Алгоритм для троек. Задача для четверок

$$(x,y,z,t).\ x^2+y^2+z^2=t^2 \qquad (**)$$

Вавилон

Математика Древнего Вавилона известна нам в основном из расшифрованных текстов глиняных табличек. Некоторые из этих клинописных текстов содержат разные задачи и таблицы чисел. Эти задачи большей частью учебные; такие глиняные таблички были своего рода учебниками.

В Вавилоне должность писца считалась столь же почётной, как и в Египте: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать подобно солнцу.» Каждый писец должен был хорошо знать математику.

Вавилонская техника вычислений была гораздо более совершенной, чем египетская, и задачи решались тоже более сложные, например, связанные с системами линейных уравнений и с квадратными уравнениями. От аликвотных дробей, на которых остановилась египетская математика, в Вавилоне быстро перешли к дробям общего вида.

В Вавилоне использовались две системы счисления: десятичная и шестидесятиричная. Точнее говоря, в шестидесятиричной системе числа записывались в виде $a_n \cdot 60^n + \cdots + a_1 \cdot 60 + a_0$, а для записи чисел $a_0, \ldots, a_n$ использовались два символа, один из которых обозначал единицы, а другой — десятки. Запись была неоднозначной: числа, отношение которых равно 60, записывались одинаково; кроме того, отсутствовал знак пропуска разряда, соответствующий нашему нулю, поэтому, например, числа $60 + 1$ и $60^2 + 1$ тоже записывались одинаково. Какое именно написано число, порой можно понять лишь из контекста.

Для вычислений в Вавилоне широко использовались разного рода таблицы. Во многом это связано с тем, что вычисления в шестидесятиричной системе более сложные, чем в десятичной. В частности, таблица умножения слишком велика, и запомнить её почти невозможно. Вместо деления производилось умножение на обратную величину, поэтому часто применялись таблицы обратных величин. Сначала в такие таблицы включались только те обратные величины чисел, которые были конечными шестидесятиричными дробями, т.е. обратные величины чисел вида $2^a3^b5^c$. В более позднее время в таблицы включались и приближённые значения обратных величин чисел 7, 11, 13, 17, 19 и т.д. Известна даже таблица чисел вида $n^3 + n^2$. Её, по-видимому, использовали для решения уравнения $x^3 + x^2 = a$, встречающегося в одной из табличек.

Окончено 08 февраля 2021 года
Начато 15 февраля 2021 года

6. ДРЕВНЕВАВИЛОНСКАЯ ЗАДАЧА НА СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ 2-Й СТЕПЕНИ

ИЗ ДРЕВНЕВАВИЛОНСКОГО ТЕКСТА ВРЕМЕН ДИНАСТИИ ХАММУРАПИ (XVIII в. до н. э.)

[№ 14, с. 87]

Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади; 3,3 (1) получилось у меня. Затем я длину и ширину сложил: 27 (2). Спрашивается длина, ширина и площадь.

[Даны] 27 и 3,3 суммы

Пояснение к задаче

[Результат] 15 длина | 3,0 — площадь
12 ширина |

Ты сделаешь так:

$$27+3,3=3,30$$
$$2+27=29\ (3).$$

Возьми половину от 29 [это дает 14;30].

$$14;30\times 14;30=3,30;15$$
$$3,30;15-3,30=0;15.$$

0;15 имеет 0;30 квадратный корень.

$$14;30+0;30=15 \text{ длина}$$
$$14;30-0;30=14 \text{ ширина}\ (4).$$

Отними 2, которые ты прибавил к 27, от ширины 14;12 истинная ширина (5).

15 длину, 16 ширину я перемножил:

$$15\times 12=3,0 \text{ площадь}$$
$$15-12=3$$
$$3,0+3=3,3\ (6).$$

Отметим, что в Вавилоне знали, что

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad (1)$$

а также что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

(разумеется эти факты приведены в современных обозначениях).