МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Томск – 2015

ОДОБРЕНО методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

Протокол № 48 от 15 декабря 2014 г.

Председатель комиссии, профессор А.Г. Дмитренко

Цветницкая С.А. Задада Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений: – Томск: Издательство «ТМЛ–Пресс»,, 2015. –20с.
Практикум включает задания и краткое изложение теории для выполнения лабораторных работ по численным методам. Практикум основан на курсе лекций по численным методам для студентов факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета.

Для студентов специальностей «применение математических методов в экономике» и «прикладная математика и информатика».

Рецензент

*Кандидат технических наук, доцент Томского государственного университета М.Е. Завгородная.*

Томский государственный университет, 2015

## 1. Задача Коши

Пусть требуется найти решение уравнения первого порядка на отрезке $\left[x_0,\ X\right]$

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Такая задача с условием в одной точке носит название задачи Коши. Для дифференциального уравнения n-го порядка задача Коши сводится к нахождению решения уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, ... y^{(n-1)}), \tag{3}$$

удовлетворяющего n условиям в одной точке

$$y(x_0) = y_0,\ y^{(1)}(x_0) = y_0^{(1)}, ... y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{4}$$

Решение поставленной задачи в аналитическом виде существует лишь для небольшого класса уравнений. Как правило, приходится обращаться к приближенным методам решения. Рассмотрим две группы приближенных методов: одношаговые и многошаговые. Приближенные методы рассмотрим на примере уравнения первого порядка (1, 2).

## 2. Одношаговые методы

Введем обозначения. Точное решение в точке x будем обозначать через y(x), а приближенное решение - $y_x$ . Общий вид одношаговых формул следующий

$$y_{x+h} = y_x + \sum_{i=1}^{s} p_i k_i , \qquad (5)$$

где $k_i$ задаются следующими формулами:

$$k_1 = hf(x, y)$$

$$k_2 = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_s = hf(x + \alpha_s h, y + \beta_{s1} k_1 + \ldots . \beta_{ss-1} k_{s-1})$$

Построить формулу (5) означает найти неизвестные параметры формулы $p_i, \alpha_i, \beta_{ij}$. Подставим в (5) точное решение y(x), тогда к правой части формулы (5) добавится некоторая функция r(h), которую назовем локальной погрешностью

$$y(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^{s} p_i k_i + r(h) \qquad (6)$$

Основная идея построения одношаговых формул состоит в том, что параметры $p_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ находят из условия близости локальной погрешности r(h) к нулевой функции. Для этого разложим r(h) в ряд Тейлора в окрестности r(0).

$$r(h) = r(0) + hr^{(1)}(0) + \frac{h^2}{2!} r^{(2)}(0) + \ldots \qquad (7)$$

Чем больше первых слагаемых в (7) обратится в ноль, тем ближе r(h) будет к нулевой функции. Если

$$r(0) = 0,\ r^{(1)}(0) = 0, \ldots r^{(m)}(0) = 0,\ r^{(m+1)}(0) \neq 0, \ (8)$$

то $r(h) = O(h^{m+1})$, а неизвестные параметры находят из соотношений (8).

*Определение 1. Одношаговая формула имеет порядок точности m. если локальная погрешность* $r(h) = O(h^{m+1})$.

Рассмотрим построение одношаговой формулы при s=1. Приближенная формула (5) примет вид

$$y_{x+h} = y_x + phf(x, y)$$

Локальная погрешность r(h) равна

$$r(h) = y(x+h) - y(x) - phf(x, y)$$

Запишем соотношения (8)

$$r(0) = y(x) - y(x) = 0;\ \ r^{(1)}(h) = y^{(1)}(x+h) -$$

$$- pf(x, y) = f(x+h, y(x+h)) - pf(x, y);$$

$$r^{(1)}(0) = f(x, y) - pf(x, y) = 0 \Rightarrow p = 1$$

Соответствующая приближенная формула имеет вид

$$y_{x+h} = y_x + hf(x, y) \qquad (10)$$

Формула (10) носит название формулы Эйлера. Можно убедиться, что $r^{(2)}(0) \neq 0$.

$$r^{(2)}(h) = \frac{d}{dh} y^{(1)}(x+h) = y^{(2)}(x+h);$$

$$r^{(2)}(0) = y^{(2)}(x) \neq 0$$

В общем случае вторая производная решения не равна нулю, следовательно, локальная погрешность $r(h) = O(h^2)$, а метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Широкое применение получила одношаговая формула Рунге-Кутта четвертого порядка точности

$$y_{x+h} = y_x + (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)/6,$$

$$k1 = hf(x, y)$$

$$k2 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k1}{2})$$

$$k3 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k2}{2})$$

$$k4 = hf(x + h, y + k3) \qquad (10)$$

## 3. Многошаговые формулы Адамса

Перепишем уравнение (1) в интегральной форме, для этого проинтегрируем его на отрезке $[x_0,\ x]$.

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \qquad (11)$$

При $x_0 = x_i,\ x = x_{i+1}$ уравнение (11) примет вид

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt \qquad (12)$$

Заменим подинтегральную функцию f(x,y(x)) интерполяционным полиномом степени p, построенным по значениям $f(x, y(x))$ в узлах $x_i, x_{i-1}, \ldots x_{i-p}$. В качестве интерполяционного полинома выберем интерполяционный полином Ньютона назад.

***Экстраполяционная формула Адамса***. Введем целочисленную переменную $t = \dfrac{x - x_i}{h}$, где h – шаг равномерной сетки. Полином примет вид

$$L_p = f_i + t\Delta^1 f_{i-1} + \ldots \frac{t(t+1)\ldots(t+p-1)}{p!}\Delta^p f_{i-p} \quad (13)$$

где $f_i = f(x_i, y_i)$, $\Delta^k f_s$ - к-ая конечная разность, отнесенная к узлу s.

$$\Delta^k f_s = \Delta^{k-1} f_{s+1} - \Delta^{k-1} f_s, \;\; \Delta^0 f_s = f_s.$$

Подставим (13) в (12) , заменив подинтегральную функцию f(x,y) интерполяционным многочленом и проинтегрируем по переменной t от 0 до 1. Получим уравнение относительно приближенных значений $y_i$.

$$y_{i+1} = y_i + f_i + \frac{1}{2}\Delta^1 f_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{i-2} \ldots \quad (14)$$

Заменив конечные разности на соответствующие значения функции, получим при p=3 приближенную формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}) \quad (15)$$

***Интерполяционная формула Адамса***. Интерполяционная формула Адамса строится аналогично экстраполяционной. Отличие состоит в том, что интерполяционный многочлен для подинтегральной функции f(x,y) строят по значениям f(x,y) в узлах $x_{i+1}, x_i, \ldots x_{i-p+1}$. Поэтому целочисленную переменную t введем по формуле $t = \dfrac{x - x_{i+1}}{h}$. Интерполяционный полином Ньютона назад примет вид

$$\rho(x) \approx \frac{y_{x,h} - y_{x,kh}}{(kh)^m - h^m} \approx \frac{y_{x,kh} - y_{x,k^2h}}{(k^2h)^m - (kh)^m}$$

Введем
обо

$$L_p = f_{i+1} + t\Delta^1 f_i + \ldots \frac{t(t+1)\ldots(t+p-1)}{p!}\Delta^p f_{i-p+1} \quad (16)$$

После подстановки (16) в (12) и интегрирования по переменной t от -1 до 0, получим

$$y_{i+1} = y_i + f_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta^1 f_i - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{i-1} \ldots \quad (17)$$

Заменив конечные разности через значения функции при p=3, получим

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}) \quad (18)$$

Здесь $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$, и, следовательно, (18) является уравнением относительно $y_{i+1}$. Одним из методов решения этого уравнения – метод итераций

$$y_{i+1}{}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{24}(9 f_{i+1}{}^{(k)} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}) \quad (19)$$

где $f_{i+1}^{(k)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$. Нулевое приближение находят из явной экстраполяционной формулы

$y_{i+1}^{(0)} = y_{i+1}$. Формулы (19) и (15) используют совместно.

## 4. Правило Рунге

С помощью правила Рунге решают следующие три задачи: вычисление погрешности приближенного решения, выбор шага, обеспечивающего заданную точность, и вычисление порядка точности метода. ***Оценка погрешности приближенного решения.*** Обозначим через $\varepsilon(x) = y(x) - y_x$. Будем говорить, что метод имеет порядок точности m , если $\varepsilon(x) \approx \rho(x) h^m$. Для вычисления неизвестной функции $\rho(x)$ в точке x получим два приближенных решения с шагом h1 и h2. Обозначим эти решения через $y_{x,h1}, y_{x,h2}$. Тогда с точностью до $O(h^{m+1})$ справедливы следующие соотношения:

$$y(x) \approx y_{x,h1} + \rho(x) h1^m,\ y(x) \approx y_{x,h2} + \rho(x) h2^m \quad (20)$$

Из (20) можно определить функцию $\rho(x)$

$$\rho(x) \approx \frac{y_{x,h1} - y_{x,h2}}{h2^m - h1^m} \quad (21)$$

Тогда погрешность приближенного решения в точке x, найденного с шагом h, равна

$$\varepsilon_{x,h} \approx \frac{y_{x,h1} - y_{x,h2}}{h2^m - h1^m} h^m \quad (22)$$

***Выбор шага***. Обратная задача теории погрешности ставится так: задана точность вычисления $\varepsilon_z$, каков должен быть шаг вычислений h, обеспечивающий заданную точность $\varepsilon_z$.

$$\varepsilon_z \approx \rho(x)h^m, \quad h \approx \left|\frac{\varepsilon_z}{\rho(x)}\right|^{\frac{1}{m}}$$

Функцию точки x находят по формуле (21).

***Оценка порядка точности***. Для нахождения порядка точности метода m необходимо иметь в точке x три приближенных решения, найденных с шагом

$$h \to y_{x,h},\ kh \to y_{x,kh},\ k^2 h \to y_{x,k^2 h},$$

где k – любое целое число, больше 1. Неизвестную функцию $\rho(x)$ можно оценить через $y_{x,h}, y_{x,kh}$, а также через $y_{x,kh}, y_{x,k^2 h}$.

значение $\gamma = \dfrac{y_{x,kh} - y_{x,k^2 h}}{y_{x,h} - y_{x,kh}}$. Справедливо приближенное равенство

$$\gamma \approx \frac{(k^2 h)^m - (kh)^m}{(kh)^m - (h)^m} = k^m$$

Логарифмируя предыдущее приближенное равенство, получим

$$m \approx \frac{\ln(\gamma)}{\ln(k)} \qquad (23)$$

## Задания

1. Найти решение задачи Коши на отрезке $[x_0,\ X]$ по формулам Эйлера и Рунгк-Кутта для трех шагов: h1=0,05, h2=0,1, h3=0,2.
2. Оценить погрешность приближенного решения, найденного по формулам Эйлера и Рунге-Кутта с ша-

гом h (шаг задает преподаватель), построить график погрешности.

3. По заданной точности вычислений оценить шаг вычислений, обеспечивающий заданную точность.

4. Оценить порядок точности методов Эйлера и Рунге-Кутта.

1. $\dfrac{dy}{dx} = -xy, \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y) \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

3. $\dfrac{dy}{dx} = x - y^2, \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 3\cos(xy), \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin(x + y), \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

6. $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin(x + y), \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 3\cos(x + y), \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

8. $\dfrac{dy}{dx} = tg(x + y), \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

9. $\dfrac{dy}{dx} = tg(x + 0.2y), \qquad y(0) = 1, \quad [0,5]$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \exp(-0.5xy),\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \exp(-0.5x)\sqrt{x+2y},\ y(0) = 1,\quad [0,5]$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \exp(-0.5x)\sqrt{2y-x},\ y(0) = 1,\quad [0,5]$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x}{1-0.5y},\qquad y(0) = 1, [0,2]$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \exp(-x)\sin(x+y),\ y(0) = 1,\quad [0,5]$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \exp(\dfrac{y-x}{2}),\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\arcsin(x-y)}{x+y},\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{arc}\,cos(x-y)}{x+y},\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

18. $\dfrac{dy}{dx} = x\exp(-xy),\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

19. $\dfrac{dy}{dx} = (x-y)\exp(-x),\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+y^2}\,\exp(-x),\ y(0) = 1,\quad [0,5]$

21. $\dfrac{dy}{dx} = (1+x-y),\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2(x+y)}{x+1},\qquad y(0) = 1,\quad [0,5]$

23. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin(x+y)}{x^2+y^2}$, $y(0)=1$, $[0,5]$

24. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(x-y)}{x^2+y^2+1}$, $y(0)=1$, $[0,5]$

25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\sin(y)}{x+y+1}$, $y(0)=1$, $[0,5]$

26. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2+1}$, $y(0)=1$, $[0,5]$

27. $\dfrac{dy}{dx}=\exp(-xy)\cos(x-y)$, $y(0)=1$, $[0,5]$

28. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\arcsin(x-y)}{x+y+1}$, $y(0)=1$, $[0,5]$

29. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\arccos(x-y)}{x+y+1}$, $y(0)=1$, $[0,5]$

30. $\dfrac{dy}{dx}=arc\cos(1+xy^2)$, $y(0)=1$, $[0,5]$.

## 5. Решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z) \end{cases} \tag{24}$$

Задача Коши для системы (24) ставится так: найти решения y(x) и z(x) на отрезке $\left[x_0,\ X\right]$, удовлетворяющие начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0.$

***Метод Эйлера***. Решение задачи Коши по методу Эйлера нахадится по следующим формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h\varphi(x_i, y_i, z_i) \end{cases} \tag{25}$$

где шаг интегрирования и узлы равномерной сетки находят по формулам $x_i = x_0 + ih, \quad h = \dfrac{X - x_0}{n}.$

***Метод Рунге-Кутта***. Решение задачи Коши по методу Рунге-Кутта находится по следующим формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(k_1^f + 2k_2^f + 2k_3^f + k_4^f) \\ z_{i+1} = z_i + \dfrac{1}{6}(k_1^\varphi + 2k_2^\varphi + 2k_3^\varphi + k_4^\varphi) \end{cases} \tag{26}$$

где

$$k_1^f = hf(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_1^\varphi = h\varphi(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2^f = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^f}{2}, z_i + \frac{k_1^\varphi}{2})$$

$$k_2^\varphi = h\varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^f}{2}, z_i + \frac{k_1^\varphi}{2})$$

$$k_3^f = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^f}{2}, z_i + \frac{k_2^\varphi}{2})$$

$$k_3^\varphi = h\varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^f}{2}, z_i + \frac{k_2^\varphi}{2})$$

$$k_4^f = hf(x_i + h, y_i + k_3^f, z_i + k_3^\varphi)$$

$$k_4^\varphi = h\varphi(x_i + h, y_i + k_3^f, z_i + k_3^\varphi)$$

## Задания

1. Найти решения систем уравнений по формулам Эйлера и Рунге- Кутта с шагами h=0,05, 0,1, 0,2 на отрезке [0,5].
2. Оценить порядок точности используемых формул по правилу Рунге.

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-x)\sin(x+y) \\ \dfrac{dz}{dx} = arc\sin(x+y+z) \end{cases}$ $\qquad y(0)=1,\ z(0)=1$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-\dfrac{x}{2})\arccos(\dfrac{1}{x+z}) \\ \dfrac{dz}{dx} = \sin(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases} \qquad y(0)=1,\ z(0)=1$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-x-y)(1+z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1+y^2+z^2} \end{cases} \qquad y(0)=1,\ z(0)=1$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-x-y) + \exp(-z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \sin(\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{10}) \end{cases} \qquad y(0)=1,\ z(0)=1$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 0.5arctg(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y}) \\ \dfrac{dz}{dx} = arctg(x+y+z) \end{cases} \qquad y(0)=1,\ z(0)=1$$

6. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-z)\sin(yz) \\ \dfrac{dz}{dx} = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$ $\qquad y(0) = 1,\ z(0) = 1$

7. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - \ln(z + x) \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - z \end{cases}$ $\qquad y(0) = 1,\ z(0) = 1$

8. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + xy} - z \\ \dfrac{dz}{dx} = -z - y \end{cases}$ $\qquad y(0) = 1,\ z(0) = 1$

9. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{z}\exp(-x) \\ \dfrac{dz}{dx} = -\ln(x + y + z) \end{cases}$ $\qquad y(0) = 1,\ z(0) = 1$

10. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + x + y + z} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}} \end{cases}$ $\qquad y(0) = 1,\ z(0) = 1$

11. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-x)\sin(zy) \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \qquad y(0)=1,\; z(0)=1$$

12. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x\sin(y) - \cos(z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \exp(-yz) \end{cases} \qquad y(0)=1,\; z(0)=1$$

13. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-x)y + \sin(xz) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{z - y + 0.5} \end{cases} \qquad y(0)=1,\; z(0)=1$$

14. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y\ln(\dfrac{x+1}{z}) \\ \dfrac{dz}{dx} = x\cos(y - z) \end{cases} \qquad y(0)=1,\; z(0)=1$$

15. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \cos(xy) + \ln(z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{z + y + 1} \end{cases} \qquad y(0)=1,\; z(0)=1$$

16. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{tg(y+z)} \\ \dfrac{dz}{dx} = \exp(-x)\sin(yz) \end{cases}$ $y(0)=1,\ z(0)=1$

17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$ $y(0)=1,\ z(0)=1$

18. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \exp(-x)(z-y) \\ \dfrac{dz}{dx} = y - \sin(z) \end{cases}$ $y(0)=1,\ z(0)=1$

19. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-0.1x+z} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1+x+y} \end{cases}$ $y(0)=1,\ z(0)=1$

20. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+arctg(x+y+z)} \\ \dfrac{dz}{dx} = \exp(-0.01xyz) \end{cases}$ $y(0)=1,\ z(0)=1$

21. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+arctg(x+y+z)} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\sqrt{1+z+y^2}}{\sqrt{1+x+y}} \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

23. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ch(y+z)}{1+x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{dz}{dx} = sh(x-y-z) \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

24. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\exp(-x^2y^2z^2)}{ch(y+z)} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{sh(y+z)} \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

25. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{ch(y+z)} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{sh(1+y+z)} \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

26. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = th(y+z+x) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{sh(1+y+z)} \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

27. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = arcth(x+y+z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \exp(-x-y-z) \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

28. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{ch(y+z+x)} \\ \dfrac{dz}{dx} = th(y-z) \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

29. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{ch(y+z+x)} + \dfrac{1}{sh(1+z-y)} \\ \dfrac{dz}{dx} = th(y-z) \qquad z(0)=1\ y(0)=1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = arcth(y+z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{ch(y+z)} \end{cases}$ $\quad y(0)=1,\ z(0)=1$

## Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т.2. Минск : Высшая школа, 1975. 671 с.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.2. М.: Наука, 1977.

## Содержание